ΜΗΧΑΝΙΣΜΟΙ ΕΠΙΛΥΣΗΣ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

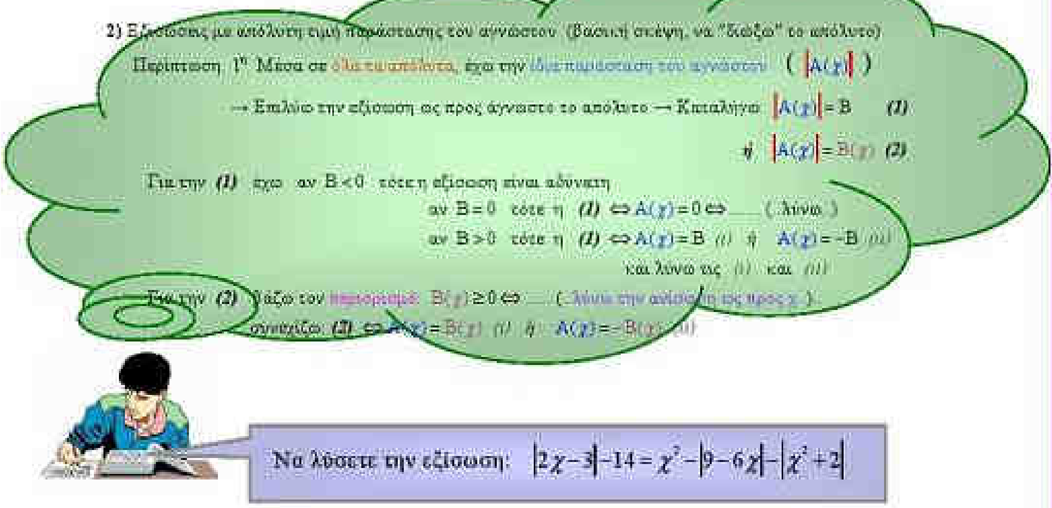
ΣΤΗΝ ΑΛΓΕΒΡΑ ΤΗΣ

Α' ΛΥΚΕΙΟΥ

ΤΖΟΥΛΑΚΟΣ Ν. ΠΑΝΑΓΙΩΤΗΣ

ΠΕΡΙΕΧΟΝΤΑΙ:

- Συνοπτική Θεωρία
- Μέθοδοι επίλυσης ασκήσεων
- Αναλυτικοί τρόποι σκέψης
- Λυμένα παραδείγματα
- Άλυτες ασκήσεις



1) ευθεία απόδειξη

Α) Περίπτωση: Ζητούν να αποδείξουμε μια ισότητα ΧΩΡΙΣ να έχουμε καμία υπόθεση

Αντιμετώπιση (ι) κοιτώ και τα δύο μέλη της ισότητας

(ιι) το μέλος στο οποίο υπάρχουν ΜΟΝΟ προσθέσεις και αφαιρέσεις μεταξύ μονώνυμων, με αφήνει αδιάφορο

(ιιι) για την απόδειξη της ισότητας παίρνω το πολύπλοκο μέλος, (δηλ. το μέλος στο οποίο υπάρχουν ταυτότητες – επιμεριστικές – και γενικά πράξεις που μπορούν να γίνουν), κάνω τις πράξεις και με ισότητες καταλήγω στο απλό μέλος.

(ιv) Στην περίπτωση που και τα δύο μέλη είναι πολύπλοκα ***ή*** σε κανένα από τα δύο μέλη δεν υπάρχουν πράξεις που να γίνονται, τότε παίρνω και τα δύο μέλη, κάνω ότι ενέργειες μπορώ, (χιαστί για ίσα κλάσματα – όλα στο $1^{ο}$ μέλος – ύψωση σε κατάλληλη δύναμη – κ.λ.π.) και με ισοδυναμίες καταλήγω σε κάτι που ισχύει.

π.χ. 1) Δείξτε ότι $\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)$

Λύση

Το πρώτο μέλος $\alpha^3+\beta^3$ είναι απλό
Στο $2^{ο}$ μέλος έχω ταυτότητα και επιμεριστική

Έχω: $(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)=\alpha^3+3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2+\beta^3-3\alpha^2\beta-3\alpha\beta^2=\alpha^3+\beta^3$

π.χ. 2) Δείξτε ότι $\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)(\alpha+3)+1=(\alpha^2+3\alpha+1)^2$

Λύση

Και τα δύο μέλη είναι πολύπλοκα (έχουν πράξεις που γίνονται).
Θα δουλέψω και με τα δύο μέλη (με ισοδυναμίες)

Θέλω να δείξω : $\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)(\alpha+3)+1=(\alpha^2+3\alpha+1)^2 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \alpha(\alpha+1)(\alpha^2+3\alpha+2\alpha+6)+1=(\alpha^2)^2+(3\alpha)^2+1^2+2\cdot\alpha^2\cdot3\alpha+2\cdot\alpha^2\cdot1+2\cdot3\alpha\cdot1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \alpha(\alpha+1)(\alpha^2+5\alpha+6)+1=\alpha^4+9\alpha^2+1+6\alpha^3+2\alpha^2+6\alpha \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \alpha(\alpha^3+5\alpha^2+6\alpha+\alpha^2+5\alpha+6)+1=\alpha^4+6\alpha^3+11\alpha^2+6\alpha+1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \alpha(\alpha^3+6\alpha^2+11\alpha+6)+1=\alpha^4+6\alpha^3+11\alpha^2+6\alpha+1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \alpha^4+6\alpha^3+11\alpha^2+6\alpha+1=\alpha^4+6\alpha^3+11\alpha^2+6\alpha+1 \text{ που ισχύει}$$

π.χ. 3) Δείξτε ότι $\dfrac{\sigma\upsilon\nu\chi}{1-\eta\mu\chi}=\dfrac{1+\eta\mu\chi}{\sigma\upsilon\nu\chi}$

Λύση

Παρατηρώ ότι δεν μπορώ να δουλέψω μόνο με ένα από τα δύο μέλη .

Θέλω να δείξω : $\dfrac{\sigma\upsilon\nu\chi}{1-\eta\mu\chi}=\dfrac{1+\eta\mu\chi}{\sigma\upsilon\nu\chi} \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\chi\cdot\sigma\upsilon\nu\chi=(1-\eta\mu\chi)\cdot(1+\eta\mu\chi) \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu^2\chi=1-\eta\mu^2\chi \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu^2\chi-1+\eta\mu^2\chi=0 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu^2\chi+\eta\mu^2\chi-1=0 \overset{\eta\mu^2\chi+\sigma\upsilon\nu^2\chi=1}{\Leftrightarrow} 1-1=0 \text{ που ισχύει}$$

π.χ. 4) Δείξτε ότι το τετράγωνο ενός περιττού αριθμού είναι περιττός αριθμός

Λύση

Θυμηθείτε ότι περιττοί είναι οι αριθμοί α της μορφής $\alpha=2\kappa+1$ με κ ακέραιο

Θα δείξω ότι το τετράγωνο του περιττού αριθμού $\alpha=2\kappa+1$ με $\kappa\in\mathbb{Z}$ (ακέραιο) είναι επίσης περιττός αριθμός, δηλ. θα δείξω ότι ο α^2 είναι της μορφής $2\nu+1$: με $\nu\in\mathbb{Z}$

Έχω $\alpha^2=(2\kappa+1)^2=4\kappa^2+4\kappa+1=2(2\kappa^2+2\kappa)+1$

Έβγαλα μόνο από τους $4\kappa^2+4\kappa$ κοινό παράγοντα το 2 , για να φτάσω στη μορφή $2\cdot\nu+1$ του περιττού αριθμού

Όμως ο αριθμός $2\kappa^2+2\kappa$ είναι ακέραιος αριθμός, αφού είναι αποτέλεσμα πολλαπλασιασμών και πρόσθεσης μεταξύ ακεραίων.

Αντικαθιστώντας $2\kappa^2+2\kappa=\nu$ έχω ότι $\alpha^2=2\nu+1$ με $\nu\in\mathbb{Z}$ άρα ο α^2 είναι περιττός αριθμός

Β) Περίπτωση: Ζητούν να αποδείξουμε μια ισότητα, ενώ έχουμε δοσμένη κάποια υπόθεση για τις μεταβλητές που υπάρχουν στην ισότητα

Αντιμετώπιση (ι) αν η δοσμένη υπόθεση με τις μεταβλητές είναι πολύπλοκη, δουλεύω την υπόθεση για να καταλήξω σε κάτι ποιο απλό

(ιι) αν στην υπόθεση έχω απλή ισότητα μεταξύ -2- (το πολύ -3-) γραμμάτων, προσπαθώ να επιλύσω ως προς το ένα γράμμα και μετά αντικαθιστώ.

(ιιι) κοιτώ τη ζητούμενη ισότητα και την αντιμετωπίζω κατά την Α) Περίπτωση.

π.χ. 1) Αν για τους $\chi,y\in\mathbb{R}$ με $\chi\cdot(\chi+y)\cdot(\chi+3y)\neq0$ ισχύει $\frac{\chi-y}{\chi+y}=\frac{2}{3}$ δείξτε ότι $\frac{\chi^2-y^2}{3\chi y+\chi^2}=\frac{3}{5}$

Λύση

Έχω ισότητα με δύο μεταβλητές, προσπαθώ να λύσω ως προς τη μία

Έχω: $\frac{\chi-y}{\chi+y}=\frac{2}{3}\Rightarrow3(\chi-y)=2(\chi+y)\Rightarrow3\chi-3y=2\chi+2y\Rightarrow3\chi-2\chi=3y+2y\Rightarrow\chi=5y$

Το 2^o μέλος είναι πολύ απλό, θα δουλέψω με το 1^o μέλος

Θέλω να δείξω ότι $\frac{\chi^2-y^2}{3\chi y+\chi^2}=\frac{3}{5}$

Είναι $\frac{\chi^2-y^2}{3\chi y+\chi^2}\overset{\chi=5y}{=}\frac{(5y)^2-y^2}{3\cdot(5y)\cdot y+(5y)^2}=\frac{25y^2-y^2}{15y^2+25y^2}=\frac{24y^2}{40y^2}=\frac{3}{5}$

π.χ. 2) Αν για τους $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}^*$ ισχύει $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}=0$ δείξτε ότι $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=(\alpha+\beta+\gamma)^2$

Λύση

Απαλοιφή παρονομαστών – πολ/ζω όλους τους όρους με $\alpha\beta\gamma$

Έχω: $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}=0\Rightarrow\alpha\beta\gamma\cdot\frac{1}{\alpha}+\alpha\beta\gamma\cdot\frac{1}{\beta}+\alpha\beta\gamma\cdot\frac{1}{\gamma}=\alpha\beta\gamma\cdot0\Rightarrow\beta\gamma+\alpha\gamma+\beta\gamma=0$ (1)

¨σύνθετο¨ μόνο το 2^o μέλος

Θέλω να δείξω ότι $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=(\alpha+\beta+\gamma)^2$

Είναι $(\alpha+\beta+\gamma)^2=\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+2\alpha\beta+2\alpha\gamma+2\beta\gamma=\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+2(\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma)\overset{(1)}{=}$

$\overset{(1)}{=}\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+2\cdot(0)=\alpha^2+\beta^2+\gamma^2$

π.χ. 3) Αν για τους $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}$ ισχύει $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=\alpha\beta+\beta\gamma+\alpha\gamma$ δείξτε ότι $\alpha^3+\beta^3+\gamma^3=3\alpha\beta\gamma$

<u>Λύση</u>

Θυμίζει έντονα ανάπτυγμα τετραγώνου $(\ldots\ldots\ldots)^2$, χρειάζομαι τα διπλάσια γινόμενα $2\alpha\beta, 2\alpha\gamma, 2\beta\gamma$ – πολ/ζω όλους τους όρους με 2

Έχω:

$$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=\alpha\beta+\beta\gamma+\alpha\gamma\Rightarrow\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-\alpha\beta-\beta\gamma-\alpha\gamma\overset{\cdot 2}{\Rightarrow}2\alpha^2+2\beta^2+2\gamma^2-2\alpha\beta-2\beta\gamma-2\alpha\gamma=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\alpha^2+\alpha^2+\beta^2+\beta^2+\gamma^2+\gamma^2-2\alpha\beta-2\beta\gamma-2\alpha\gamma=0\Rightarrow(\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2)+(\beta^2-2\beta\gamma+\gamma^2)+(\alpha^2-2\alpha\gamma+\gamma^2)=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow(\alpha-\beta)^2+(\beta-\gamma)^2+(\alpha-\gamma)^2=0\Rightarrow\left\{\begin{matrix}\alpha-\beta=0\\ \beta-\gamma=0\\ \alpha-\gamma=0\end{matrix}\right\}\Rightarrow\alpha=\beta=\gamma\quad(1)$$

Θέλω να δείξω ότι $\alpha^3+\beta^3+\gamma^3=3\alpha\beta\gamma$ που ισχύει από την (1) και ταυτότητα υπό συνθήκη του Eyler

π.χ. 4) Αν για τους $\alpha,\beta\in\mathbb{R}^*$ ισχύει $\alpha^2-\beta^2=4$ δείξτε ότι $\dfrac{(\alpha+\beta)^2}{2\beta}-\alpha=\dfrac{2+\beta^2}{\beta}$

<u>Λύση</u>

Παρόλο που η υπόθεση έχει ισότητα με δύο μεταβλητές, η επίλυση ως προς τη μία δίνει ποό δύσκολη ισότητα, οπότε κοιτώ κατ' ευθείαν το ζητούμενο

Θέλω να δείξω ότι

$$\frac{(\alpha+\beta)^2}{2\beta}-\alpha=\frac{2+\beta^2}{\beta}\Leftrightarrow\frac{\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2}{2\beta}-\alpha=\frac{2+\beta^2}{\beta}\overset{\cdot 2\beta}{\Leftrightarrow}2\beta\cdot\frac{\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2}{2\beta}-2\beta\cdot\alpha=2\beta\cdot\frac{2+\beta^2}{\beta}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2-2\alpha\beta=2\cdot(2+\beta^2)\Leftrightarrow\alpha^2+\beta^2=4+2\beta^2\Leftrightarrow\alpha^2+\beta^2-4-2\beta^2=0\Leftrightarrow\alpha^2-\beta^2-4=0$$

Που ισχύει αφού από υπόθεση έχω $\alpha^2-\beta^2=4$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ - ΓΕΝΙΚΕΣ ΣΥΜΒΟΥΛΕΣ

1) Αν με έμμεσο ή με άμεσο τρόπο, για δύο μεταβλητές χ και y, γνωρίζεις τις τιμές των $\chi+y$ είτε $\chi-y$ είτε $\chi\cdot y$ τότε όταν έχεις παραστάσεις συμμετρικές ως προς τα χ και y, κάνε ομαδοποίηση των συμμετρικών παραστάσεων και παρουσίασε κάποια από τα:

(ι) $\chi^2+y^2\xrightarrow{\text{αντικατάστησε}}\begin{cases}(\chi+y)^2-2\chi y & \text{αν έχεις γνωστό το } \chi+y\\ (\chi-y)^2+2\chi y & \text{αν έχεις γνωστό το } \chi-y\end{cases}$

(ιι) $\chi^3+y^3\xrightarrow{\text{αντικατάστησε}}(\chi+y)^3-3\chi y(\chi+y)$

$\chi^3-y^3\xrightarrow{\text{αντικατάστησε}}(\chi-y)^3+3\chi y(\chi-y)$

π.χ. 1) Αν $\chi+y=2$ και $\chi\cdot y=-2$ δείξτε ότι $\chi^3+5\chi^2y+5\chi y^2+y^3=\chi^3y+\chi y^3+16$

<u>Λύση</u>

Θέλω να δείξω: $\chi^3+5\chi^2y+5\chi y^2+y^3=\chi^3y+\chi y^3+16\Leftrightarrow\chi^3+y^3+5\chi^2y+5\chi y^2=\chi^3y+\chi y^3+16\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow(\chi+y)^3-3\chi y(\chi+y)+5\chi y(\chi+y)=\chi y(\chi^2+y^2)+16\overset{\text{υπόθεση}}{\Leftrightarrow}$$

$$\Leftrightarrow 2^3-3\cdot(-2)\cdot 2+5\cdot(-2)\cdot 2=-2\left[(\chi+y)^2-2\chi y\right]+16\Leftrightarrow 8+12-20=-2\left[2^2-2(-2)\right]+16\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 0=-2\cdot[4+4]+16\Leftrightarrow 0=-16+16 \qquad \text{που ισχύει}$$

π.χ. 2) Αν $\chi + y = 5$ και $\chi^3 + y^3 = 63$ να υπολογίσετε τις τιμές των παραστάσεων:

(ι) $A = \chi + \chi y - y$, (ιι) $B = \chi^2 + y^2$, (ιιι) $\Gamma = \dfrac{1}{\chi} + \dfrac{1}{y}$, (ιv) $\Delta = 4\chi^3 y + 17\chi^2 y^2 + 4\chi y^3$

<u>Λύση</u>

Από την $\chi^3 + y^3 = 63$ και την κατάλληλη ταυτότητα της 1ης παρατήρησης, θα υπολογίσω το χy (δουλεύω στη 2η υπόθεση για να την κάνω απλούστερη)

Έχω $\chi^3 + y^3 = 63 \Rightarrow (\chi + y)^3 - 3\chi y(\chi + y) = 63 \overset{\chi+y=3}{\Rightarrow} 3^3 - 3\chi y \cdot 3 = 63 \Rightarrow 27 - 9\chi = 63 \Rightarrow$

$-9\chi y = 63 - 27 \Rightarrow -9\chi y = 36 \Rightarrow \chi y = \dfrac{36}{-9} \Rightarrow \chi y = -4$ Άρα:

(ι) $A = \chi + \chi y + y = (\chi + y) + \chi y \underset{\chi y=-4}{\overset{\chi+y=3}{=}} 3 + (-4) = -1$

(ιι) $B = \chi^2 + y^2 = (\chi + y)^2 - 2\chi y \underset{\chi y=-4}{\overset{\chi+y=3}{=}} 3^2 - 2(-4) = 9 + 8 = 17$

(ιιι) $\Gamma = \dfrac{1}{\chi} + \dfrac{1}{y} = \dfrac{y+\chi}{\chi y} \underset{\chi y=-4}{\overset{\chi+y=3}{=}} \dfrac{3}{-4} = -\dfrac{3}{4}$

(ιv) $\Delta = 4\chi^3 y + 17\chi^2 y^2 + 4\chi y^3 = 4\chi^3 y + 4\chi y^3 + 17\chi^2 y^2 = 4\chi y(\chi^2 + y^2) + 17(\chi y)^2 \underset{\chi y=-4}{\overset{\chi^2+y^2=17}{=}}$

$= 4(-4)17 + 17(-4)^2 = -16 \cdot 17 + 17 \cdot 16 = 0$

π.χ. 3) Αν $\alpha + \beta - \gamma = 0$ και $\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 = 0$ με $\gamma \neq 0$ δείξτε ότι $3\alpha\beta = 2\gamma^2$

<u>Λύση</u>

Άρα έχω υπολογίσει το άθροισμα $\alpha + \beta$ Ακόμα μπορώ να δουλέψω στη $\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 = 0$ όπου παρουσιάζεται το άθροισμα $\alpha^3 + \beta^3$

Έχω $\alpha + \beta - \gamma = 0 \Rightarrow \alpha + \beta = \gamma$

Ακόμα $\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 = 0 \Rightarrow (\alpha + \beta)^3 - 3\alpha\beta(\alpha + \beta) + \gamma^3 = 0 \overset{\alpha+\beta=\gamma}{\Rightarrow} \gamma^3 - 3\alpha\beta\gamma + \gamma^3 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow 2\gamma^3 = 3\alpha\beta\gamma \underset{\text{διαιρώ όλους τους όρους με } \gamma}{\overset{\gamma\neq 0}{\Rightarrow}} 2\gamma^2 = 3\alpha\beta$ οπότε αποδείξαμε τη ζητούμενη

2) Αν παρουσιάζεται ισότητα κλασμάτων (π.χ. $\dfrac{\alpha}{\beta} = \dfrac{\gamma}{\delta} = \ldots = \dfrac{\chi}{y}$), τότε θέσε όλα τα κλάσματα ίσα με μία μεταβλητή που δεν χρησιμοποιεί η άσκηση, μετά επιλύεις κάθε κλάσμα ως προς ένα γράμμα του αριθμητή και μετά αντικαθιστάς αυτό το γράμμα όπου παρουσιάζεται.

π.χ. 1) Δείξτε ότι αν ισχύει $\dfrac{\alpha}{\beta} = \dfrac{\gamma}{\delta}$ τότε θα ισχύει $\dfrac{\alpha+\gamma}{\beta+\delta} = \dfrac{5\gamma - 3\alpha}{5\delta - 3\beta} = \dfrac{\alpha}{\beta}$

<u>Λύση</u> Έχω $\dfrac{\alpha}{\beta} = \dfrac{\gamma}{\delta} = \kappa \Rightarrow \begin{cases} \alpha = \kappa \cdot \beta \\ \gamma = \kappa \cdot \delta \end{cases}$ (1)

Θέλω να δείξω ότι $\dfrac{\alpha+\gamma}{\beta+\delta} = \dfrac{5\gamma - 3\alpha}{5\delta - 3\beta} = \dfrac{\alpha}{\beta} \overset{(1)}{\Leftrightarrow} \dfrac{\kappa \cdot \beta + \kappa \cdot \delta}{\beta + \delta} = \dfrac{5\kappa \cdot \delta - 3\kappa \cdot \beta}{5\delta - 3\beta} = \dfrac{\kappa \cdot \beta}{\beta} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \frac{\kappa\cdot(\beta+\delta)}{\beta+\delta}=\frac{\kappa\cdot(5\delta-3\beta)}{5\delta-3\beta}=\frac{\kappa\cdot\beta}{\beta}\Leftrightarrow \kappa=\kappa=\kappa$$ που ισχύει

π.χ. 2) Να βρείτε τους αριθμούς: α,β,γ οι οποίοι είναι ανάλογοι με τους: $6, 7, \frac{9}{2}$ και έχουν άθροισμα: 70

Λύση

Αφού οι αριθμοί α,β,γ είναι ανάλογοι με τους $6,7,\frac{9}{2}$ θα ισχύει :

$$\frac{\alpha}{6}=\frac{\beta}{7}=\frac{\gamma}{\frac{9}{2}}=\kappa \Leftrightarrow \begin{cases}\alpha=6\kappa\\ \beta=7\kappa\\ \gamma=\frac{9}{2}\kappa\end{cases} \quad (1)$$

Ακόμα έχω $\alpha+\beta+\gamma=70 \overset{(1)}{\Leftrightarrow} 6\kappa+7\kappa+\frac{9}{2}\kappa=70 \overset{\cdot 2}{\Leftrightarrow}$

$\Leftrightarrow 12\kappa+14\kappa+9\kappa=140 \Leftrightarrow 35\kappa=140 \Leftrightarrow \kappa=4$

Οπότε από την (1) θα έχω $\alpha=6\cdot 4=24$, $\beta=7\cdot 4=28$ και $\gamma=\frac{9}{2}\cdot 4=18$

3) Αν σε ζητούμενη ισότητα έχεις παραστάσεις με κυκλική εναλλαγή των γραμμάτων (μεταβλητών) τότε

- ● Πάρε μόνο τη μία από αυτές τις παραστάσεις, δούλεψε μόνο με αυτή, βγάλε κάποιο αποτέλεσμα
- ●● Μετά για κάθε μία από τις άλλες παραστάσεις γράψε: « όμοια έχω: *άλλη παράσταση* = *αντίστοιχο αποτέλεσμα μ' αυτό που βρήκες, κάνοντας την κυκλική εναλλαγή* »
- ●●● Τέλος αντικατάστησε στην αρχική ισότητα.

π.χ. 1) Δείξτε ότι $\frac{2\beta^2-\alpha\beta-\alpha\gamma+2\beta\gamma}{\beta+\gamma}+\frac{2\gamma^2-\beta\gamma-\beta\alpha+2\gamma\alpha}{\gamma+\alpha}+\frac{2\alpha^2-\gamma\alpha-\gamma\beta+2\alpha\beta}{\alpha+\beta}=\alpha+\beta+\gamma$

Λύση

Παρατηρώ ότι στην ζητούμενη ισότητα οι τρεις κλασματικοί όροι μοιάζουν. Βλέπω ότι κάθε ένας προκύπτει από τον προηγούμενό της, κάνοντας την κυκλική εναλλαγή των γραμμάτων $\alpha\to\beta\to\gamma\to\alpha$. Θα δουλέψω με την παράσταση $\frac{2\beta^2-\alpha\beta-\alpha\gamma+2\beta\gamma}{\beta+\gamma}$, και μετά για τις άλλες παραστάσεις θα πω: « όμοια έχω: ……….

Έχω: $\frac{2\beta^2-\alpha\beta-\alpha\gamma+2\beta\gamma}{\beta+\gamma}=\frac{\beta(2\beta-\alpha)-\gamma(\alpha-2\beta)}{\beta+\gamma}=\frac{\beta(2\beta-\alpha)+\gamma(2\beta-\alpha)}{\beta+\gamma}=\frac{(2\beta-\alpha)\cdot(\beta+\gamma)}{\beta+\gamma}=2\beta-\alpha$

Όμοια θα έχω $\frac{2\gamma^2-\beta\gamma-\beta\alpha+2\gamma\alpha}{\gamma+\alpha}=2\gamma-\beta$ και $\frac{2\alpha^2-\gamma\alpha-\gamma\beta+2\alpha\beta}{\alpha+\beta}=2\alpha-\gamma$

Άρα $\frac{2\beta^2-\alpha\beta-\alpha\gamma+2\beta\gamma}{\beta+\gamma}+\frac{2\gamma^2-\beta\gamma-\beta\alpha+2\gamma\alpha}{\gamma+\alpha}+\frac{2\alpha^2-\gamma\alpha-\gamma\beta+2\alpha\beta}{\alpha+\beta}=$

$=2\beta-\alpha+2\gamma-\beta+2\alpha-\gamma=\alpha+\beta+\gamma$

π.χ. 2) Αν $\alpha+\beta+\gamma=0$ με $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}^*$ δείξτε ότι $\frac{\alpha^2-\beta^2-2\beta\gamma}{\alpha+\beta}+\frac{\beta^2-\gamma^2-2\gamma\alpha}{\beta+\gamma}+\frac{\gamma^2-\alpha^2-2\alpha\beta}{\gamma+\alpha}=0$

Λύση

Παρατηρώ ότι στην ζητούμενη ισότητα οι τρεις κλασματικοί όροι μοιάζουν. Βλέπω ότι κάθε ένας προκύπτει από τον προηγούμενό της, κάνοντας την κυκλική εναλλαγή των γραμμάτων $\alpha\to\beta\to\gamma\to\alpha$. Θα δουλέψω με την παράσταση $\frac{\alpha^2-\beta^2-2\beta\gamma}{\alpha+\beta}$, και μετά για τις άλλες παραστάσεις θα πω: « όμοια έχω: ……….

Έχω: $\dfrac{\alpha^2-\beta^2-2\beta\gamma}{\alpha+\beta}=$ (1)

Έχω $\alpha+\beta+\gamma=0$ και θα την επιλύσω ως προς το γ αφού στην παράστασή μου, φαίνεται να μην "ταιριάζει" το γ

Έχω $\alpha+\beta+\gamma=0 \Rightarrow \gamma=-\alpha-\beta$,

Οπότε (1) $=\dfrac{\alpha^2-\beta^2-2\beta(-\alpha-\beta)}{\alpha+\beta}=\dfrac{\alpha^2-\beta^2+2\alpha\beta+2\beta^2}{\alpha+\beta}==\dfrac{\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2}{\alpha+\beta}=\dfrac{(\alpha+\beta)^2}{\alpha+\beta}=\alpha+\beta$

Όμοια θα έχω: $\dfrac{\beta^2-\gamma^2-2\gamma\alpha}{\beta+\gamma}=\beta+\gamma$ και $\dfrac{\gamma^2-\alpha^2-2\alpha\beta}{\gamma+\alpha}=\gamma+\alpha$

Άρα $\dfrac{\alpha^2-\beta^2-2\beta\gamma}{\alpha+\beta}+\dfrac{\beta^2-\gamma^2-2\gamma\alpha}{\beta+\gamma}+\dfrac{\gamma^2-\alpha^2-2\alpha\beta}{\gamma+\alpha}=(\alpha+\beta)+(\beta+\gamma)+(\gamma+\alpha)=$

$=2\alpha+2\beta+2\gamma=2(\alpha+\beta+\gamma)\overset{\alpha+\beta+\gamma=0}{=}2\cdot 0=0$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

1. Δείξτε ότι (ι) $(\chi+\alpha)^2-(\chi+\beta)^2=(2\chi+\alpha-\beta)(\alpha-\beta)$

(ιι) $(\alpha-\beta)(\alpha+\beta)^3-\alpha^4+\beta^4=2\alpha\beta(\alpha^2-\beta^2)$

(ιιι) $(\alpha^2+\beta^2)(\chi^2+y^2)-(\alpha\chi+\beta y)^2=(\alpha y-\beta\chi)^2$

2. Αν $\alpha^2-2\beta^2=\alpha\beta$ δείξτε ότι $\alpha^3+\beta^3=3\beta^2(\alpha+\beta)$

3. Αν α,β,γ τα μήκη των πλευρών τριγώνου ΑΒΓ με $\widehat{\mathrm{A}}=90^0$ δείξτε ότι $\dfrac{\alpha-\beta}{\gamma}=\dfrac{\gamma}{\alpha+\beta}$

4. Αν $\alpha+\beta+\gamma=0$ και $\alpha\cdot\beta\cdot\gamma\neq 0$ δείξτε ότι

(ι) $\dfrac{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}{\alpha^3+\beta^3+\gamma^3}=-\dfrac{2}{3}\left(\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\beta}+\dfrac{1}{\gamma}\right)$ (ιι) $\alpha(\beta-\gamma)^2+\beta(\gamma-\alpha)^2+\gamma(\alpha-\beta)^2+9\alpha\beta\gamma=0$

5. Αν $\chi+y=5$ να υπολογίσετε την τιμή των παραστάσεων

(ι) $\mathrm{A}=3\chi^2+6\chi y+3y^2$ (ιι) $B=\chi^3+y^3+3\chi y(\chi+y)$

6. Αν $\chi-y=1$ και $\chi y=-3$ να υπολογίσετε την τιμή των (ι) $\mathrm{A}=\chi^2+y^2$ (ιι) $B=\chi^3-y^3$

7. Αν $\chi+\dfrac{3}{\chi}=5$ να υπολογίσετε την τιμή των παραστάσεων (ι) $\mathrm{A}=\chi^2+\dfrac{9}{\chi^2}$ (ιι) $B=\chi^3+\dfrac{27}{\chi^3}$

8. Αν $\chi-y=1$ και $\chi^2+y^2=4$ να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $\Pi=\chi^3-y^3+(\chi+y)^2$

9. Αν $\dfrac{\alpha}{\beta}=\dfrac{\gamma}{\delta}=\dfrac{\kappa}{\lambda}$ δείξτε ότι (ι) $\dfrac{\alpha-2\beta}{2\alpha+3\beta}=\dfrac{\gamma-2\delta}{2\gamma+3\delta}$ (ιι) $\dfrac{(\alpha+\beta)^2}{(\gamma+\delta)^2}=\dfrac{\alpha\beta}{\gamma\delta}$

(ιιι) $\dfrac{\alpha+2\gamma+3\kappa}{\beta+2\delta+3\lambda}=\dfrac{\kappa}{\lambda}$ (ιv) $\alpha+\delta=\beta+\gamma+\dfrac{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)}{\alpha}$

10. Να βρεθούν οι αριθμοί $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ αν είναι ανάλογοι με τους αριθμούς $1,-1,\dfrac{1}{2},-\dfrac{2}{3}$ και ισχύει $3\alpha-2\beta-\gamma+\delta=10$

11. Δείξτε ότι $\dfrac{\alpha^2-4\alpha+3}{\alpha-3}+\dfrac{\beta^2-4\beta+3}{\beta-3}+\dfrac{\gamma^2-4\gamma+3}{\gamma-3}=\alpha+\beta+\gamma-3$

12. Δείξτε ότι $\dfrac{\alpha^2-\beta^2-4\gamma^2+4\beta\gamma}{\alpha-\beta+2\gamma}+\dfrac{\beta^2-\gamma^2-4\alpha^2+4\gamma\alpha}{\beta-\gamma+2\alpha}+\dfrac{\gamma^2-\alpha^2-4\beta^2+4\alpha\beta}{\gamma-\alpha+2\beta}=0$

2) *εις άτοπο απαγωγή*

Χρησιμοποιείται, κυρίως, στην περίπτωση που δεν μπορούμε να αποδείξουμε με ευθεία απόδειξη αυτό που ζητούν.

▶ Κάνουμε την παραδοχή ότι δεν ισχύει αυτό που ζητείται, αλλά ότι ισχύει το αντίθετο απ' ότι ζητείται. (δηλ. ***ΥΠΟΘΕΤΟΥΜΕ*** ότι ισχύει το αντίθετο από αυτό που ζητείται)

▶ Δουλεύουμε έχοντας ως δεδομένο την παραδοχή (***ΥΠΟΘΕΣΗ***) που κάναμε

▶ Καταλήγουμε σε κάποιο λάθος (κάτι που είναι αδύνατο να ισχύει – σε ***ΑΤΟΠΟ***)

▶ Επομένως δεν ισχύει η παραδοχή (***ΥΠΟΘΕΣΗ***) που κάναμε, άρα θα ισχύει το αντίθετό της, δηλ. αυτό που ζητείται.

π.χ. 1) Δείξτε ότι αν το τετράγωνο ενός ακέραιου αριθμού α είναι άρτιος, τότε ο α είναι άρτιος

Θυμηθείτε ότι άρτιοι είναι οι αριθμοί α της μορφής $\alpha=2\kappa$ με κ ακέραιο

Λύση

Έχω ότι $\alpha^2=2\nu$ με $\nu\in\mathbb{Z}$ και θέλω να δείξω ότι και ο αριθμός α είναι της μορφής $\alpha=2\kappa$ με $\kappa\in\mathbb{Z}$
Παρατηρώ ότι καμία από τις προηγούμενες μεθόδους δεν με βοηθάει στην απόδειξη αυτής της πρότασης
Θα δουλέψω με την εις άτοπο απαγωγή

Έστω ότι ο ακέραιος αριθμός α είναι περιττός,

Το αντίθετο του « άρτιος»

οπότε είναι της μορφής $\alpha=2\kappa+1$ με $\kappa\in\mathbb{Z}$

Για τον α^2 θα έχω $\alpha^2=(2\kappa+1)^2=4\kappa^2+4\kappa+1=2(2\kappa^2+2\kappa)+1 \underset{\nu\in\mathbb{Z}}{\overset{2\kappa^2+2\kappa=\nu}{=}} 2\nu+1=\textit{περιττός}$

Άτοπο αφού από υπόθεση έχω ότι το τετράγωνο ενός ακέραιου α (δηλ. το α^2) είναι άρτιος

Άρα ο ακέραιος αριθμός α δεν μπορεί να είναι περιττός, οπότε θα είναι άρτιος

π.χ. 2) Δείξτε ότι ο αριθμός $\sqrt{2}$ είναι άρρητος

Λύση

Θέλω να δείξω ότι ο $\sqrt{2}$ δεν μπορεί να γραφεί ως κλάσμα
Παρατηρώ ότι καμία από τις προηγούμενες μεθόδους δεν μπορεί να με βοηθήσει στην απόδειξη αυτής της πρότασης
Θα δουλέψω με την εις άτοπο απαγωγή

Έστω ότι ο $\sqrt{2}$ δεν είναι άρρητος αριθμός. Τότε θα είναι ρητός, οπότε υπάρχει ανάγωγο κλάσμα $\frac{\kappa}{\lambda}>0$ με $\kappa\in\mathbb{N}$ και $\lambda\in\mathbb{N}^*$ ώστε $\sqrt{2}=\frac{\kappa}{\lambda}$

Ανάγωγο είναι το κλάσμα όταν Μ.Κ.Δ.(αριθμητή,παρονομαστή) = 1 (το ανάγωγο κλάσμα δεν απλοποιείται)

Έχω $\sqrt{2}=\frac{\kappa}{\lambda}\Leftrightarrow(\sqrt{2})^2=\left(\frac{\kappa}{\lambda}\right)^2\Leftrightarrow 2=\frac{\kappa^2}{\lambda^2}\Leftrightarrow 2\lambda^2=\kappa^2$ ***(1)***

Υψώνω στο τετράγωνο για να «διώξω» τη ρίζα

Από τη ***(1)*** συμπεραίνω ότι ο κ^2 είναι άρτιος οπότε και ο κ θα είναι άρτιος (δές το π.χ. 1) άρα θα είναι $\kappa=2\nu$ με $\nu\in\mathbb{N}$, οπότε ***(1)*** $\Leftrightarrow 2\lambda^2=(2\nu)^2\Leftrightarrow 2\lambda^2=4\nu^2\Leftrightarrow\lambda^2=2\nu^2$ άρα ο λ^2 είναι άρτιος, που σημαίνει ότι και ο λ είναι άρτιος δηλ. $\lambda=2\rho$ με $\rho\in\mathbb{N}$

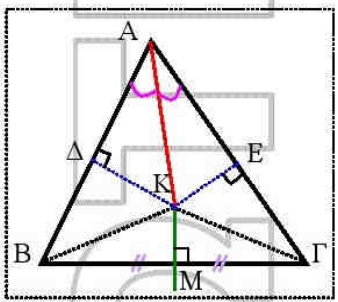
Κατέληξα να έχω ότι οι κ,λ είναι και οι δύο άρτιοι, πράγμα αδύνατο αφού το κλάσμα $\frac{\kappa}{\lambda}$ με το οποίο (υπέθεσα ότι) ισούται ο $\sqrt{2}$ είναι ανάγωγο και δεν μπορεί να απλοποιηθεί

Επομένως ο $\sqrt{2}$ δεν μπορεί να γραφεί υπό μορφή κλάσματος, άρα είναι άρρητος αριθμός π.χ. 3) Δείξτε ότι η μεσοκάθετος της πλευράς ΒΓ ενός τριγώνου ΑΒΓ με $AB < A\Gamma$ και η διχοτόμος της γωνίας ΒΑΓ δεν τέμνονται σε εσωτερικό σημείο του τριγώνου

Υπόδειξη: Θυμηθείτε από την γεωμετρία της Γ΄ γυμνασίου πως αποδείξαμε ότι: (i) κάθε σημείο της διχοτόμου μιας γωνίας ισαπέχει από τις πλευρές της γωνίας και (ii) κάθε σημείο της μεσοκαθέτου ενός ευθύγραμμου τμήματος ισαπέχει από τα άκρα του τμήματος, και χρησιμοποιήστε τα .

Λύση

Με τις γνώσεις που έχω έως τώρα, δεν βλέπω πως θα μπορούσα να αποδείξω την παραπάνω πρόταση
Θα δοκιμάσω να την αποδείξω με την εις άτοπο απαγωγή



Έστω ότι η διχοτόμος της γωνίας ΒΑΓ και η μεσοκάθετος της πλευράς ΒΓ τέμνονται σε εσωτερικό σημείο Κ του τριγώνου (διπλανό σχήμα)

Ονομάζω Μ το μέσο της ΒΓ και ΚΔ , ΚΕ τις αποστάσεις του Κ από τις πλευρές ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα.
Ενώνω το σημείο Κ με τις κορυφές Β και Γ του τριγώνου

Συγκρίνω τα τρίγωνα ΑΔΚ και ΑΕΚ για τα οποία έχω

i) Είναι ορθογώνια ($\hat{\Delta}=\hat{E}=90^0$)
ii) Έχουν την πλευρά ΑΚ κοινή
iii) Έχουν $\widehat{\Delta AK}=\widehat{KAE}$ (αφού η ΑΚ διχοτομεί την $\widehat{BA\Gamma}$)

Άρα $\overset{\triangle}{A\Delta K} = \overset{\triangle}{AEK}$ ***(1)***

Συγκρίνω τα τρίγωνα ΒΔΚ και ΓΕΚ για τα οποία έχω

i) Είναι ορθογώνια ($\hat{\Delta}=\hat{E}=90^0$)
ii) $KB = K\Gamma$ (το Κ ισαπέχει από τα Β και Γ αφού είναι σημείο της μεσοκαθέτου της ΒΓ)
iii) $K\Delta = KE$ (αφού $\overset{\triangle}{A\Delta K} = \overset{\triangle}{AEK}$)

Άρα $\overset{\triangle}{B\Delta K} = \overset{\triangle}{\Gamma EK}$ ***(2)***

Από την ***(1)*** συμπεραίνω ότι $A\Delta = AE$ ***(3)***
Από την ***(2)*** συμπεραίνω ότι $\Delta B = E\Gamma$ ***(4)***

Προσθέτοντας κατά μέλη τις ***(3)*** και ***(4)*** έχω: $A\Delta + \Delta B = AE + E\Gamma \Rightarrow AB = A\Gamma$, Αδύνατο αφού από την υπόθεση (δεδομένα της άσκησης) ισχύει $AB < A\Gamma$

Άρα η μεσοκάθετος της πλευράς ΒΓ του τριγώνου ΑΒΓ με $AB < A\Gamma$ και η διχοτόμος της γωνίας ΒΑΓ δεν είναι δυνατό να τέμνονται σε εσωτερικό σημείο του τριγώνου